TD n°13: Révisions

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un † sont à faire en priorité, ceux marqués d'un † sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Exercices de révision.

Exercice 1. Fonctions sans points fixes.
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière telle que $f \circ f$ n'a pas de point fixe.

1. Démontrer à l'aide du théorème de Picard que $z \mapsto \frac{f(f(z))-z}{f(z)-z}$ est constante.

2. En déduire que $f'(z)$ ne s'annule pas, puis qu'il existe une constante $a \neq 0$ telle que
$$f'(f(z)) = a + \frac{1-a}{f'(z)}$$
et donc que $f'(f(z))$ n'atteint pas la valeur a.

3. Démontrer que f' est constante, puis que f est une translation.

Exercice 2. Obstructions et exactitude.
Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $S \subseteq U$ un ensemble fini, $V = U \setminus S$.

1. Démontrer que la suite
$$0 \to \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\frac{d}{dz}} \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathbb{C}^S \to 0$$
est exacte, où on note $\mathrm{Res}(f) := (\mathrm{Res}_a(f))_{a\in S} \in \mathbb{C}^S$.

2. Démontrer que la suite
$$0 \to 2i\pi\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}(V)^\times \xrightarrow{\mathrm{Res}\circ\mathrm{dlog}} \mathbb{Z}^S \to 0$$
est exacte, où $\mathrm{Res}(\mathrm{dlog}(f)) = (\mathrm{Res}_a(f'/f))_{a\in S} \in \mathbb{Z}^S$.

Exercice 3. Principe de réflexion de Schwarz.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, symétrique par rapport à $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $z \in \Omega$ ssi $\overline{z} \in \Omega$. On note $\Omega^\pm = \{z \in \Omega : \pm\Im(z) > 0\}$ et $\Omega^0 = \Omega \cap \mathbb{R}$. On désire démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit $f : \Omega^+ \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, vérifiant que $\lim_{\Im(z)\to 0} \Im(f(z)) = 0$. Alors, la formule*
$$f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$$
définit une fonction holomorphe sur $\Omega^+ \cup \Omega^-$ qui se prolonge à Ω.

1. Soit u une fonction harmonique sur Ω^+, vérifiant $\lim_{\Im(z)\to 0} u(z) = 0$. Démontrer que
$$u^*(z) := \begin{cases} u(z), & z \in \Omega^+ \\ -u(\overline{z}), & z \in \Omega^- \\ 0, & z \in \Omega^0 \end{cases}$$
définit une fonction continue sur Ω qui satisfait l'égalité de la moyenne et est donc harmonique.

2. Vérifier que si f est holomorphe sur Ω^+, alors $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ est également holomorphe.

---

†Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

3. On suppose à présent que $\Im(f(z)) \to 0$ quand $\Im(z) \to 0$. Démontrer que la fonction holomorphe définie par
$$f^*(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega^+ \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in \Omega^- \end{cases}$$
se prolonge en une fonction holomorphe f^* définie sur Ω entier. On pourra penser à démontrer qu'une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}(0,r)$ à valeurs réelles sur $]-r,r[$ vérifie $g(\overline{z}) = \overline{g(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{D}(0,r)$.

Exercice 4. Quelques applications du théorème de Rouché.

1. Démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss en utilisant uniquement le théorème de Rouché.
2. En appliquant le théorème de Rouché à $z\sin(z)$ et $z\sin(z) - 1$, démontrer que toutes les solutions de $z\sin(z) = 1$ sont réelles.

Exercice 5. Sommes de fractions rationnelles.

1. Soit $f(z) = P(z)/Q(z)$ une fonction rationnelle vérifiant $\deg(P) + 2 \le \deg(Q)$. Démontrer l'égalité
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}, Q(n)\neq 0} \frac{P(n)}{Q(n)} = -2i\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}, Q(n)=0} \mathrm{Res}_n\left(f(z)\frac{1}{e^{2i\pi z}-1}\right) - 2i\pi \sum_{\alpha\notin\mathbb{Z}, Q(\alpha)=0} \mathrm{Res}_\alpha\left(f(z)\frac{1}{e^{2i\pi z}-1}\right).$$
2. Supposons de plus que f est paire, n'a pas de pôles dans $\mathbb{Z}_{\neq 0}$, et a un pôle d'ordre $2k$ (éventuellement $k = 0$) en 0. On suppose de plus que tous les pôles de la fonction, hors 0, sont simples. Démontrer l'égalité :
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{P(n)}{Q(n)} = \sum_{k=0}^{m} c_{2k}\zeta(2m-2k) - i\pi \sum_{Q(\alpha)=0} \frac{1}{e^{2i\pi\alpha}-1} \cdot \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$
où $P(z)/Q(z) = z^{-2k}\sum_{m\geqslant 0} c_{2m}z^{2m}$ et on normalise $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 6. La sphère de Riemann comme espace projectif et l'action de PGL_2.
On note $\mathbb{CP}^1$ l'ensemble des droites complexes dans $\mathbb{C}^2$. Si $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ est non nul, on note $[u : v]$ la droite qu'il engendre, et on a $[\lambda u : \lambda v] = [u : v]$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

1. Vérifier que $\mathbb{C}$ s'injecte dans $\mathbb{CP}^1$ en envoyant z sur $[z : 1]$.
2. Vérifier que $\mathbb{CP}^1 \setminus \mathbb{C}$ est réduit à un point, la droite $[1 : 0]$, que l'on note ∞.
Ainsi, $\mathbb{CP}^1$ s'identifie naturellement au compactifié d'Alexandroff du plan : la sphère. On le munit de cette topologie. Si $U \subseteq \mathbb{CP}^1$ est un ouvert contenant l'infini et $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction, on dit que f est holomorphe si elle est holomorphe au voisinage de tout point non-infini et si $z \mapsto f([1 : z])$ est holomorphe au voisinage de zéro (moralement, $z \mapsto f(1/z)$ est holomorphe au voisinage de zéro). Si $f : U \to \mathbb{CP}^1$ est une fonction, on dit qu'elle est holomorphe si elle est de la forme $[u(z) : v(z)]$ avec u, v fonctions holomorphes.
3. Dessiner $\mathbb{RP}^1$, le disque unité et le demi-plan de Poincaré sur $\mathbb{CP}^1$.
4. Démontrer que pour $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, la fonction
$$[z : w] \mapsto [az + bw : cz + dw]$$
est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{CP}^1$. On appelle homographie de $\mathbb{CP}^1$ toute application de cette forme.
5. Vérifier la cohérence avec la définition des homographies sur des ouverts de $\mathbb{C}$.
6. Expliciter une homographie qui envoie biholomorphiquement le disque unité $\mathbb{D}$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$.
7. On note $\mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$ l'ensemble des applications holomorphes de $\mathbb{CP}^1$ dans lui-même. Démontrer que l'application $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$ donnée par
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \big([z : w] \mapsto [az + bw : cz + dw]\big)$$
est compatible à la composition. En déduire que les homographies sont inversibles, et donner la formule pour l'inverse. On note $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ l'image de cette application.

8. Vérifier que la restriction de l'application précédente à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est toujours $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.
9. Calculer les noyaux des morphismes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 7. Produits de Blaschke

Soit $\mathbb{D}$ le disque unité. Pour $a \in \mathbb{D}$, on définit le *facteur de Blaschke* $\varphi_a \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ par

$$\varphi_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \ \forall z \in \mathbb{D}.$$

1. Démontrer que $|z| = 1 \implies |\varphi_a(z)| = 1$ et en déduire que φ_a définit une bijection holomorphe $\varphi_a \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, d'inverse φ_{-a} et qui se prolonge continument au bord.
2. Soit $\varphi \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique telle que $\varphi(0) = 0$. Pour $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ on définit la *fonction de comptage de Nevanlinna* par
$$N_\varphi(w) := \sum_{\varphi(z)=w} \log \left| \frac{1}{z} \right|$$
où les z sont comptés avec multiplicité.
   (a) Soient $a_1, ..., a_n$ tels que $\varphi(a_j) = w$ pour tout j, et $B_n(z) = \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(z)$. Démontrer que $\varphi_w \circ \varphi$ s'écrit $B_n g$, avec $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$.
   (b) Démontrer que $|g(0)| \leqslant 1$ à l'aide du principe du maximum.
   (c) En déduire l'inégalité de Littlewood :
$$N_\varphi(w) \leqslant \log |1/w| .$$
3. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique bornée et non identiquement nulle. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des zéros de f comptés avec multiplicité. Montrer
$$\sum_{n\geqslant 1}(1-|a_n|) < \infty.$$
4. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de points de $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ telle que $\sum_{n\geqslant 1}(1-|a_n|) < \infty$. Montrer que le produit infini
$$\prod_{n\geqslant 1} \frac{|a_n|}{a_n} \varphi_{a_n}$$
converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers une fonction analytique B qui est bornée en valeur absolue par 1. La fonction B est appelée le *produit de Blaschke* associé à la suite $(a_n)_n$.
Indication : on pourra commencer par prouver que le produit est de la forme $\prod(1+g_n)$ *où* $\sum g_n$ *converge uniformément sur tout compact.*
5. Soit $K \subseteq \mathbb{U}$ un fermé. À l'aide des produits de Blaschke, construire une série entière de rayon de convergence 1 dont la somme se prolonge en une fonction analytique au voisinage de tout $z \in \mathbb{U} \setminus K$ mais au voisinage d'aucun élément de K.